Zu den Preismodellen von Leontief und Sraffa

Jean-François Emmenegger, Daniel Chable,
e-mail: jean-francois.emmenegger@unifr.ch

8. Input-Output Workshop, Schloss Osnabrück, 31.3.-1.4.2016

Eine der Hauptaufgaben der Wirtschaftswissenschaften besteht darin, zu erklären wie die Bildung von Warenpreisen vor sich geht. Am bekanntesten ist heute zu dieser Frage das Allgemeine Walrasianische Gleichgewichtsmodell (1874) zur Ermittlung von Gleichgewichtspreisen, welches die Grundlage der neo-liberalen Erklärung bildet. Im Rahmen der klassischen Theorie hat man die Preismodelle von Leontief, die erst durch Solow und Morishima (1958) entwickelt worden sind, siehe auch Oosterhaven [4], de Mesnard [1], Ghosh [2] und das Sraffa Preismodell.

1) Zuerst präsentieren wir das *Indexpreismodell* von Leontief. Es geht um eine komparativ-statische Analyse. Hier werden alle Grössen in *monetären Termen* betrachtet. Man hat die Input-Output-Matrix $\mathbf{A}$, deren Koeffizienten a_{ij} angeben, wieviel Input x_i benötigt wird, um eine Einheit von x_j zu produzieren, den Vektor $\mathbf{x}$ des Gesamtoutputs, den Vektor $\mathbf{f}$ der Endnachfrage, die Einheitsmatrix $\mathbf{I}$.

Es seien w_j, $j = 1, .., n$, die Lohnraten (=wage rates) des Sektors j. Man betrachtet die Periode vom *Basisjahr* '0' zum *Berichtsjahr* '1'. Im *Wertschöpfungsbereich (=value added)* betrachten wir zur Vereinfachung nur Löhne. Es seien w_{j0}, respektive w_{j1}, die Lohnraten des Sektors j im Basisjahr '0', respektive Berichtsjahr '1'. Dann sind $\tilde{p}_{vj,0|1} := \frac{w_{j1}}{w_{j0}}$, $j = 1, ..., n$, n *Indexpreise* der Löhne, die einen Lohnvergleich zwischen Anfang und Ende dieser Periode ermöglichen. Man bildet den Vektor der *Indexpreise* der Löhne $\tilde{\mathbf{p}}_{v0|1} = [\tilde{p}_{v1,0|1}, ...\tilde{p}_{vn,0|1}]'$.

Des weiteren sei dann $v_{cj,0}$ der Lohnanteil pro Werteinheit produzierter Ware j im Basisjahr. Diese ergeben den Vektor $\mathbf{v}_{c,0} = [v_{c1,0}, ..., v_{cn,0}]'$ der entsprechenden Lohnanteile. Es seien p_{i0}, respektive p_{i1}, $i = 1, .., n$, die Preise der Waren i im Basisjahr '0', respektive Berichtsjahr '1'. Man bildet damit ihre *Indexpreise* $\tilde{p}_{i,0|1} := \frac{p_{i1}}{p_{i0}}$. Diese fasst man zum Vektor $\tilde{\mathbf{p}}_{0|1} = [\tilde{p}_{1,0|1}, ..., \tilde{p}_{n,0|1}]'$ der *Indexpreise* der Waren zusammen. Es gilt:

$$\tilde{\mathbf{p}}_{0|1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{c,0} \cdot \tilde{\mathbf{p}}_{v,0|1}. \tag{1}$$

2) Nun wird das *Preismodell* von Leontief in *physischen Termen* dargestellt. Es handelt sich hier um tatsächliche Preise (*Zahlungseinheit* pro *Wareneinheit*). Man geht aber nicht von einem '*Zustand der vollständigen Konkurenz*' aus, wie Schumann ([5], p. 62) sagt, bei dem *'sich nach dem Ansatz der herkömmlichen Preistheorie Angebots- und Nachfragekurven schneiden würden;* die hier betrachteten Preise '*gestatten jedoch auf diesen Ansatz ganz zu verzichten'*. Um diesen Unterschied deutlich hervorzuheben, bezeichnet man nach Schumann die hier im Preismodell von Leontief auftreteden Preise als *'Schattenpreise'*.

Damit gehen wir über zur Input-Output Matrix $\mathbf{C}$ in *physischen Termen*. Ferner sei ν_{cj} der Lohnanteil pro Einheit produzierter Ware j (beispielsweise: der Lohnanteil ist gleich 1.20 *CHF* pro *kg* produziertes Schwarzbrot, bei einem totalen Preis von 2.50 *CHF* das *kg* Schwarzbrot). Dies ergibt den Vektor $\boldsymbol{\nu}_c = [\nu_{c1}, ..., \nu_{cn}]'$ der Lohnanteile pro Einheit produzierter Ware. Die Leontief *Schattenpreise* p_i pro Ware i, die in einen Vektor $\mathbf{p}$ zusammengefasst werden, berechnen sich wie folgt:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}')^{-1}\boldsymbol{\nu}_c. \tag{2}$$

Mit dem Modell (2) werden komparativ-statische Analysen durchgeführt.

3) Sraffa entwickelte ein Modell der *Produktionspreise*. Es ist eine Erweiterung des Modells der *Schattenpreise* von Leontief. Man setzt jedoch für alle Produktionssektoren j eine konstante Lohnrate w voraus. Man geht davon aus, dass man alle sektoriellen Arbeitszeiten (Arbeitswerte) L_j kennt (beispielsweise: $L_1 = 54$ *Mann-Jahre* Arbeitszeit) und bildet dann den Vektor $\mathbf{L} = [L_1, ..., L_n]'$. Es bezeichne ferner q_i den gesammten Output des Sektors i in *physischen Termen*, das heisst, die interindustrielle Produktion zusammen mit der Konsumendnachfrage. Damit bildet man den Vektor des gesamten Outputs $\mathbf{q}$, der zur Diagonalmatrix $\hat{\mathbf{q}}$ erweitert wird. Dann berechnet man die inverse Diagonalmatrix $\hat{\mathbf{q}}^{-1}$. Man bestimmt noch die Frobeniuszahl $\lambda_C < 1$ der Matrix $\mathbf{C}$ und die maximale Profitrate $R = \frac{1}{\lambda_C} - 1 > 0$. Die effektive Profitrate $r > 0$ ist dann im Intervall $[0, R]$ enthalten, also $r \in [0, R]$. Der Vektor $\mathbf{p}$ der *Produktionspreise* von Sraffa wird wie folgt berechnet:

$$\mathbf{C}'\mathbf{p}(1 + r) + (\hat{\mathbf{q}}^{-1}\mathbf{L}) \cdot w = \mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}'(1 + r))^{-1}(\hat{\mathbf{q}}^{-1}\mathbf{L}) \cdot w. \tag{3}$$

Schlisslich können die Profitrate im gegebenen Intervall $r \in [0, R]$ und die Lohnrate w exogen unabhängig voneienander gewählt werden, damit können die Sraffa *Produktionspreise* (3) berechnet werden. Dies bedeutet, dass bei Sraffa aus den Arbeitszeiten $\mathbf{L}$, der Profitrate r und der Lohnrate w die *Produktionspreise* $\mathbf{p}$ der Waren bestimmt sind, welche die Reproduktion des ökonomischen Systems Periode für Periode nachhaltig garantieren.

Schliesslich wird das Sraffa Preismodell (3) für Verteilungen von Profitraten und Lohnraten je Sektor dargestellt und durch Rechenbeispiele illustirert.

Literatur

[1] de Mesnard, L., *About the reinterpretation of the Gosh model as a price model*, LATEC (UMR CNRS 5118), Faculty of Economics, University of Burgundy, Working paper, (2001)

[2] Ghosh, A., *Input-Output Approach in an Allocation System*, Economica, p. 58-64, February (1958).

[3] Morishima, M., *Prices, Interest and Profits in a Dynamic Leontief System*, Econometrica, Vol. 26, No. 3 pp. 358-380, (Jul., 1958),

[4] Oosterhaven, J., *Leontief versus Ghoshian Price and Quantity Models*, Shoutern Economic Journal, (1996).

[5] Schumann, J., *Input-Output Analyse*, Berlin: Springer Verlag, (1968).

[6] Sraffa, P., *Production of Commodities by Means of Commodities*, (English edition) Cambridge: Cambridge University Press, (1960).