FACULTÉ DES SCIENCES ÉCONOMIQUES & SOCIALES / SÉMINAIRE DE STATISTIQUE
WIRTSCHAFTS- UND SOZIALWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT / SEMINAR FÜR STATISTIK

Zu den Preismodellen von Leontief und Sraffa

Jean-François Emmenegger, Daniel Chable

ehem. Departement für Quantitative Wirtschaftsforschung,
Universität Freiburg, Schweiz,
jean-francois.emmenegger@unifr.ch

7. Input-Output-Workshop, 30. März -1. April 2016, Osnabrück, Deutschland

Preismodelle von Leontief und Piero Sraffa (1)

- Welche Fragen beantworten diese Preismodelle ?
- Schattenpreise = Sraffa / Leontiefpreise $\Leftrightarrow$ Markpreise
- **Leontief**'s Berliner Doktorat und Artikel (1928) "Die Wirtschaft als Kreislauf".
- **W. Leontief (1905-1999)** Input-Output Analyse
- **Piero Sraffa (1898-1983)** "Warenproduktion mittels Waren" (WmW) in der engl. Ausgabe (1960), deutsche Ausgabe (1976) : das Zirkularitätsprinzip, das Überschussprinzip (Profit, Löhne), eine Wirtschaft ohne Geld (*numéraire*)
- **Preismodell** von Sraffa, WmW
- Leontiefs Quantitäts- und **Preismodell**, Ghosh (1958), Oosterhaven (1996)

Input-Output-Tabelle (Geldgrössen) (2)

Hersteller der Erzeugnisse	Abnehmer der Erzeugnisse S_1	S_2	$\dots$	S_j	$\dots$	S_n	End-nachfrage	gesamte Verwendung
S_1	z_{11}	z_{12}	$\dots$	z_{1j}	$\dots$	z_{1n}	f_1	x_1
S_2	z_{21}	z_{22}	$\dots$	z_{2j}	$\dots$	z_{2n}	f_2	x_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_i	z_{i1}	z_{i2}	$\dots$	z_{ij}	$\dots$	z_{in}	f_i	x_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_n	z_{n1}	z_{n2}	$\dots$	z_{nj}	$\dots$	z_{nn}	f_n	x_n
Wertschöpfung	v_1	v_2	$\dots$	v_j	$\dots$	v_n	V/F	
gesamtes Aufkommen	x_1	x_2	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n		X

TABLE: Input-Output Tabelle von n Industriesektoren mit Endnachfrage und Wertschöpfung

Indexpreismodell von Leontief (monetär) (3)

1. Indexpreismodell von Leontief (monetär)

$$\mathbf{x} = \mathbf{Z}'\mathbf{e} + \mathbf{v}. \tag{1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}\mathbf{A}'\mathbf{e}) + \hat{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{v} = (\hat{\mathbf{x}}^{-1}\hat{\mathbf{x}})\mathbf{A}'\mathbf{e} + \mathbf{v}_c \tag{2}$$

dies gibt mit $\hat{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{e}$ die Gleichung

$$\mathbf{e} = \mathbf{A}'\mathbf{e} + \mathbf{v}_c. \tag{3}$$

$\mathbf{v}_c := \hat{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{v}$: *Lohnanteile pro Werteinheit produzierter Waren*

$$\boxed{\mathbf{e} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1}(\hat{\mathbf{v}}_c\mathbf{e})} \tag{4}$$

$$P_{L,0|1} = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_{i|1} \cdot q_{i|0}}{\sum_{i=1}^{k} p_{i|0} \cdot q_{i|0}} \quad : \quad P_{L,0|0} = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_{i|0} \cdot q_{i|0}}{\sum_{i=1}^{k} p_{i|0} \cdot q_{i|0}} = 1. \tag{5}$$

$$\tilde{p}_{vj,0|1} := \frac{w_{j1}}{w_{j0}} \ , \quad j = 1, ..., n, \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{p}}_{v0|1} = [\tilde{p}_{v1,0|1}, ...\tilde{p}_{vn,0|1}]' \tag{6}$$

$$\tilde{p}_{i,0|1} := \frac{p_{i1}}{p_{i0}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{p}}_{0|1} = [\tilde{p}_{1,0|1}, ..., \tilde{p}_{n,0|1}]', \tag{7}$$

Indexpreismodell von Leontief (montär) (4)

Es gilt zuerst für das *Basisjahr* :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}}_{0|0} &= \mathbf{e} = \tilde{\mathbf{p}}_{v,0|0} \\ \mathbf{e} = \tilde{\mathbf{p}}_{0|0} &= (\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1}(\hat{\mathbf{v}}_c \mathbf{e}) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1}(\hat{\mathbf{v}}_c \tilde{\mathbf{p}}_{v,0|0}) \\ \tilde{\mathbf{p}}_{0|0} &= (\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1} \cdot \hat{\mathbf{v}}_c \cdot \tilde{\mathbf{p}}_{v,0|0}, \end{aligned} \tag{8}$$

und dann für das laufende Jahr

$$\boxed{\tilde{\mathbf{p}}_{0|1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{c,0} \cdot \tilde{\mathbf{p}}_{v,0|1}.} \tag{9}$$

Miller & Blair sagen : *"Dieses Modell wird gewöhnlich gebraucht, um in der Wirtschaft die Wirkung der Änderung von primären Kosten (wie Lohnkosten) auf andere Preise zu beschreiben".*

$$\boxed{\mathbf{Z}_1 = \hat{\tilde{\mathbf{p}}}_{0|1}\mathbf{Z}_0 \quad ; \quad \mathbf{f}_1 = \hat{\tilde{\mathbf{p}}}_{0|1}\mathbf{f}_0 \quad ; \quad \mathbf{v}_1 = \hat{\mathbf{v}}_0\,\tilde{\mathbf{p}}_{v,0|1} = (\hat{\mathbf{x}}_0 \cdot \hat{\mathbf{v}}_{c,0})\,\tilde{\mathbf{p}}_{v,0|1}.} \tag{10}$$

$[\mathbf{Z}_0] = [\mathbf{Z}_1] = [\mathbf{f}_0] = [\mathbf{f}_1] = [\mathbf{v}_0] = [\mathbf{v}_1] = CHF$; deshalb $[\tilde{\mathbf{p}}_{0|1}] = [\tilde{\mathbf{p}}_{v,0|1}] = 1.$

Beispiel 1 : Indexpreismodell von Leontief (montär) (5)

Beispiel 1 :
Man betrachte eine 3-Sektorenwirkschaft mit Grössen zum Basisjahr "0" :

Basisjahr Hersteller	Abnehmer der Erzeugnisse S_1	S_2	S_3	Endnachfrage f_{0i}
S_1 : *Weizen*	40	30	20	10
S_2 : *Eisen*	30	30	30	60
S_3 : *Holz*	25	30	35	110

Wir führen die Berechnungen des Preismodelels von Leontief durch und betrachten dann folgende Preiserhöhungen

a) (Osterhaven) : einheitliche Lohnerhöhung von 20%. Berechne $\tilde{\mathbf{p}}_{0|1}$.

b) (Miller & Blair) : unterschiedlich Lohnerhöhungen, S_1 von 30%, S_2 von 20%, S_3 von 10% Berechne $\tilde{\mathbf{p}}_{0|1}$.

Lösung :

$$\mathbf{Z}_0 = \begin{bmatrix} 40 & 30 & 20 \\ 30 & 30 & 30 \\ 25 & 30 & 35 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{f}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 60 \\ 110 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

Beispiel 1 : Lösung (6)

$$\mathbf{x}_0 := \mathbf{Z}_0\mathbf{e} + \mathbf{f}_0 = \begin{bmatrix} 40 & 30 & 20 \\ 30 & 30 & 30 \\ 25 & 30 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 60 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 200 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{Z}_0'\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 200 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 40 & 30 & 25 \\ 30 & 30 & 30 \\ 20 & 30 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 60 \\ 115 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

$$\mathbf{v}_{c,0} = \hat{\mathbf{x}}_0^{-1}\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{100} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{150} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{200} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 60 \\ 115 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.4 \\ 0.575 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Die Matrix der technischen Koeffizienten im Basisjahr,

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{Z}_0\hat{\mathbf{x}}_0^{-1} = (a_{ij}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 40 & 30 & 20 \\ 30 & 30 & 30 \\ 25 & 30 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{100} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{150} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{200} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.15 \\ 0.25 & 0.2 & 0.175 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

Dann bestätigen wir die Identität :

$$\mathbf{A}_0'\mathbf{e} + \mathbf{v}_{c,0} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.25 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.15 & 0.175 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.4 \\ 0.575 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{e}. \tag{16}$$

Beispiel 1 : Lösung Oosterhaven (7)

$$\mathbf{I} - \mathbf{A}_0' = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.3 & -0.25 \\ -0.2 & 0.8 & -0.2 \\ -0.1 & -0.15 & 0.825 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Damit erhält man die transponierte *Leontief Inverse*, $(\mathbf{I} - \mathbf{A}_0')^{-1} = \frac{adj(\mathbf{I}-\mathbf{A}_0')}{det(\mathbf{I}-\mathbf{A}_0')}$,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}_0')^{-1} = \frac{1}{59} \cdot \begin{bmatrix} 126 & 57 & 52 \\ 37 & 94 & 34 \\ 22 & 24 & 84 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

a) (Oosterhaven) Der Indexpreis der Löhne : $\mathbf{p}_{v,0|1} = [1.2, 1.2, 1.2]'$

$$\mathbf{v}_{c,1} := \hat{\mathbf{v}}_{c,0}\, \tilde{\mathbf{p}}_{v,0|1} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.575 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.2 \\ 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.48 \\ 0.69 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Indexpreis der *produzierten Waren* :

$$\tilde{\mathbf{p}}_{0|1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_0')^{-1} \cdot \mathbf{v}_{c,1} = \frac{1}{59} \cdot \begin{bmatrix} 126 & 57 & 52 \\ 37 & 94 & 34 \\ 22 & 24 & 84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.48 \\ 0.69 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.2 \\ 1.2 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

$$\boxed{\tilde{\mathbf{p}}_{v,0|1} = [1+\rho, \ldots, 1+\rho]' \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{p}}_{0|1} = [1+\rho, \ldots, 1+\rho]'.} \tag{21}$$

$$\mathbf{Z}_1 = \hat{\tilde{\mathbf{p}}}_{0|1} \mathbf{Z}_0 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 & 30 & 20 \\ 30 & 30 & 30 \\ 25 & 30 & 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 36 & 24 \\ 36 & 36 & 36 \\ 30 & 36 & 42 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

Beispiel 1 : Lösung Osterhaven - Miller & Blair (8)

Gesamtlohnsumme $V = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{e} = 216$, Gesamtendnachfrage $F = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{e} = 216$.

$$\mathbf{x}_1 = \hat{\tilde{\mathbf{p}}}_{0|1}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 180 \\ 240 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\tilde{\mathbf{p}}}_{0|1}\hat{\mathbf{x}}_0, \tag{23}$$

laufendes Jahr Hersteller	Abnehmer S_1	S_2	S_3	Endnachfrage f_{1i}	gesamte Verwendung
S_1 : *Weizen*	48	36	24	12	*120*
S_2 : *Eisen*	36	36	36	72	*180*
S_3 : *Holz*	30	36	42	132	*240*
Wertschöpfung pro Sektor, v_{1j}	*6*	*72*	*138*	*V= 216 / F= 216*	
gesamtes Aufkommen	*120*	*180*	*240*		X = *540*

Resultat : $\tilde{\mathbf{p}}_{0|1} = [1.2, 1.2, 1.2]' = \tilde{\mathbf{p}}_{v,0|1} = [1.2, 1.2, 1.2]'$.

b) (Miller & Blair) Indexpreis der Löhne : $\tilde{\mathbf{p}}_{v,0|1} = [1.1, 1.2, 1.3]'$.

Lohnanteile pro Werteinheit produzierter Waren

$$\mathbf{v}_{c,1} := \hat{\mathbf{v}}_{c,0}\, \tilde{\mathbf{p}}_{v,0|1} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.575 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.2 \\ 1.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.055 \\ 0.48 \\ 0.7475 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Indexpreise der produzierten Waren :

$$\tilde{\mathbf{p}}_{0|1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_0')^{-1} \cdot \mathbf{v}_{c,1} = \frac{1}{59} \cdot \begin{bmatrix} 126 & 57 & 52 \\ 37 & 94 & 34 \\ 22 & 24 & 84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.055 \\ 0.48 \\ 0.7475 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.24 \\ 1.23 \\ 1.28 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Beispiel 1 : Lösung Miller & Blair (9)

Die *Verfelchtungsmatrix* des laufenden Jahr :

$$\mathbf{Z}_1 = \hat{\tilde{\mathbf{p}}}_{0|1}\mathbf{Z}_0 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1.24 & 0 & 0 \\ 0 & 1.23 & 0 \\ 0 & 0 & 1.28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 & 30 & 20 \\ 30 & 30 & 30 \\ 25 & 30 & 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49.6 & 37.2 & 24.8 \\ 36.9 & 36.9 & 36.9 \\ 32 & 38.4 & 44.8 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

laufendes Jahr Hersteller	Abnehmer S_1	S_2	S_3	Endnachfrage f_{1i}	gesamte Verwendung
S_1 : $Weizen$	49.6	37.2	24.8	12.4	*124*
S_2 : $Eisen$	36.9	36.9	36.9	73.8	*184.5*
S_3 : $Holze$	32	38.4	44.8	140.8	*256*
Wertschöpfung pro Sektor, v_{1j}	*5.5*	*72*	*149.5*	*V= 227 / F= 227*	
Gesamtes Aufkommen	*124*	*184.5*	*256*		X = *564.5*

Resultat : $\tilde{\mathbf{p}}_{0|1} = [1.24, 1.23, 1.28]' \neq \tilde{\mathbf{p}}_{v,0|1} = [1.1, 1.2, 1.3]'$

$\mathbf{A}_1 = \mathbf{Z}_1\hat{\mathbf{x}}_1^{-1} \neq \mathbf{A}_0$ nicht länger invariant bleibt.

$$\mathbf{A}_0 \neq \mathbf{A}_1 := \mathbf{Z}_1\hat{\mathbf{x}}_1^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 49.6 & 37.2 & 24.8 \\ 36.9 & 36.9 & 36.9 \\ 32 & 38.4 & 44.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{124} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{369} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{256} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.202 & 0.097 \\ 0.298 & 0.2 & 0.144 \\ 0.258 & 0.208 & 0.175 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Preismodell von Leontief (physisch) (10)

2. Preismodell von Leontief (physisch)

Hersteller	Abnehmer der Erzeugnisse S_1	...	S_j	...	S_n	End-nachfrage	gesamte Verwendung
S_1	s_{11}	...	s_{1j}	...	s_{1n}	d_1	q_1
S_2	s_{21}	...	s_{2j}	...	s_{2n}	d_2	q_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_i	s_{i1}	...	s_{ij}	...	s_{in}	d_i	q_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_n	s_{n1}	...	...	...	s_{nn}	d_n	q_n
Arbeitszeiten $[Person/Periode]$	L_1	...	L_j	...	L_n	L/D	
gesamtes Aufkommen	$\downarrow$ q_1	...	$\downarrow$ q_j	...	$\downarrow$ q_n		Q

TABLE: Warenfluss in physischen Termen

Preismodell von Leontief (physisch) (11)

$$\left\{ \begin{array}{c} x_i = p_i q_i \\ z_{ij} = p_i s_{ij} \\ f_i = p_i d_i \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}\mathbf{p} \quad ; \quad \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}} \\ \mathbf{Z} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{S} \\ \mathbf{f} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{d} \end{array} \right. \tag{28}$$

$$v_j := W_j = w_j \cdot L_j \Leftrightarrow \mathbf{v} = \hat{\mathbf{w}}\mathbf{L}. \tag{29}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{Z}'\mathbf{e} + \mathbf{v}, \tag{30}$$

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{q}}\mathbf{p} = \mathbf{Z}'\mathbf{e} + \mathbf{v} = (\hat{\mathbf{p}}\mathbf{S})'\mathbf{e} + \hat{\mathbf{w}}\mathbf{L} = \mathbf{S}'\hat{\mathbf{p}}\mathbf{e} + \hat{\mathbf{w}}\mathbf{L} = \hat{\mathbf{q}}\mathbf{C}'\hat{\mathbf{p}}\mathbf{e} + \hat{\mathbf{w}}\mathbf{L}. \tag{31}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{C}'\mathbf{p} + \hat{\mathbf{q}}^{-1}(\hat{\mathbf{w}}\mathbf{L}). \tag{32}$$

$\boldsymbol{\nu}_c := \hat{\mathbf{q}}^{-1}(\hat{\mathbf{w}}\mathbf{L})$; Anteile der *Lohnkosten pro Einheit physischen Outputs*,

$$\mathbf{p} := \mathbf{C}'\mathbf{p} + \boldsymbol{\nu}_c \tag{33}$$

$$\boxed{\mathbf{p} = \mathbf{C}'\mathbf{p} + \boldsymbol{\nu}_c \quad \textit{oder} \quad \mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}')^{-1}\boldsymbol{\nu}_c,} \tag{34}$$

Beispiel 2 : Preismodell von Leontief (physisch) (12)

Beispiel 2 :

Hersteller	Abnehmender Sektor Weizen	Eisen	Truthähne	End-nachfrage	gesamte Verwendung
Weizen	186	54	30	180	450 *Tonnen von Weizen*
Eisen	12	6	3	-	21 *Tonnen von Eisen*
Truthähne	9	6	15	30	60 *Dutzende von Truthähnen*
Arbeiter (Mannjahre)	18 $\downarrow$	12 $\downarrow$	30 $\downarrow$	$L = 60/$ $D = 210$	
gesamtes Aufkommen	450	21	60		

Gegeben : Lohnrate im Basisjahr : $w_0 = \frac{11}{20} \; \frac{k\ CHF}{Mannjahre}$.

Berechne ; $\mathbf{C}_0$, transponierte Leontief Inverse $(\mathbf{I} - \mathbf{C}_0')^{-1}$,

Lohnkosten $\mathbf{v}_0$, Lohnkosten pro Einheit produzierter Menge $\mathbf{v}_C$,

absolute Preise $\mathbf{p}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{C}_0')^{-1}\boldsymbol{\nu}_{c,0}$,
Verflechtungsmatrix $\mathbf{Z}_0$, Endnachfrage $\mathbf{f}_0$, gesamten Verwendung $\mathbf{x}_0$,

Matrix $\mathbf{A}_0 = \mathbf{Z}_0\hat{\mathbf{x}}_0^{-1}$, bestätige Identität$\mathbf{A}_0 = \hat{\mathbf{p}}_0\mathbf{C}_0\hat{\mathbf{p}}_0^{-1}$.

Zuwachs der Lohnrate von $w_0 = 0.55 \; \frac{k\ CHF}{Mannjahre}$ auf $w_1 = 0.65 \; \frac{k\ CHF}{Mannjahre}$.

Beispiel 2 : Preismodell von Leontief (physisch) (13)

Gegeben : Vektor der Lohnraten :

$$\mathbf{w}_0 = [0.55, 0.55, 0.55]' \quad ; \quad w_0 = 0.55. \tag{35}$$

Vektor der Löhne

$$\mathbf{v}_0 = \hat{\mathbf{w}}_0 \mathbf{L} := w_0 \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0.55 & 0 & 0 \\ 0 & 0.55 & 0 \\ 0 & 0 & 0.55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix} = 0.55 \cdot \begin{bmatrix} 18 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.9 \\ 6.6 \\ 16.5 \end{bmatrix} \tag{36}$$

$[\mathbf{v}_0] = k\ CHF$. Lohnsumme : $W_0 = \mathbf{v}_0'\mathbf{e} = 33\ k\ CHF$, Endnachfrage : $D_0 = \mathbf{f}_0'\mathbf{e} = 33\ k\ CHF$.

Mit der *gesamten Verwendung* $\mathbf{q}_0$, den *Löhnen* $\mathbf{v}_0 = w_0\mathbf{L} = [9.9, 6.6, 16.5]'$ berechnet man die *Löhne pro Einheit produzierter Menge*, definiert als :

$$\boldsymbol{\nu}_{c,0} = \hat{\mathbf{q}}^{-1}(w_0\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{450} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{21} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{60} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.9 \\ 6.6 \\ 16.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.022 \\ 0.314 \\ 0.275 \end{bmatrix}, \tag{37}$$

Masseinheiten :
$\nu_{c,01} = 0.22 \ \frac{k\ CHF}{t\ \ von\ \ Weizen}$, $\nu_{c,02} = 0.314 \ \frac{k\ CHF}{t\ \ von\ \ Eisen}$, $\nu_{c,03} = 0.275 \ \frac{k\ CHF}{Dutzend\ \ Truth\ddot{a}hne}$

Dann berechnen wir die*transponierte Leontief Inverse*

$$(\mathbf{I} - \mathbf{C}_0')^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1095}{506} & \frac{441}{5060} & \frac{1}{11} \\ \frac{2175}{253} & \frac{903}{506} & \frac{10}{11} \\ \frac{510}{253} & \frac{224}{1265} & \frac{16}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.16 & 0.0872 & 0.0909 \\ 8.60 & 1.78 & 0.909 \\ 2.02 & 0.177 & 1.45 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Beispiel 2 : Preismodell von Leontief (physisch) (14)

$$\mathbf{p}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{C}_0')^{-1}\boldsymbol{\nu}_{c,0} = \begin{bmatrix} 2.16 & 0.0872 & 0.0909 \\ 8.60 & 1.78 & 0.909 \\ 2.02 & 1.77 & 1.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.022 \\ 0.314 \\ 0.275 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

$p_{10} = 0.1 \ \frac{k\ CHF}{t\ von\ \ Weizen}$, $p_{20} = 1 \ \frac{k\ CHF}{t\ von\ \ Eisen}$, $p_{30} = 0.5 \ \frac{k\ CHF}{Dutzend\ \ Truthähne}$.

$$\mathbf{Z}_0 = \hat{\mathbf{p}}_0\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 186 & 54 & 30 \\ 12 & 6 & 3 \\ 9 & 6 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.6 & 5.4 & 3 \\ 12 & 6 & 3 \\ 4.5 & 3 & 7.5 \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Hersteller	Abnehmender Sektor S_1	S_2	S_3	End-nachfrage f_{0i}	gesamte Verwendung ($k\ CHF$)
S_1	18.6	5.4	3	18	x_{01}=45
S_2	12	6	3	-	x_{02}=21
S_3	4.5	3	7.5	15	x_{03}=30
Teilsumme	35.1	14.4	13.5	-	
Lohnkosten W_{0j}	9.9	6.6	16.5	$W_0 = D_0 = 33$	
gesamtes Aufkommen	$x_{01} = 45$	$x_{02} = 21$	$x_{03} = 30$		$X_0 = 129$

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{Z}_0\hat{\mathbf{x}}_0^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 18.6 & 5.4 & 3 \\ 12 & 6 & 3 \\ 4.5 & 3 & 7.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{45} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{21} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.413 & 0.257 & 0.100 \\ 0.270 & 0.286 & 0.1 \\ 0.1 & 0.143 & 0.25 \end{bmatrix} \tag{41}$$

Komparativ-statische Analyse (15)

$$\mathbf{v}_1 = \hat{\mathbf{w}}_1 \mathbf{L} := w_1 \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0.65 & 0 & 0 \\ 0 & 0.65 & 0 \\ 0 & 0 & 0.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.7 \\ 7.8 \\ 19.5 \end{bmatrix}, \tag{42}$$

$$\mathbf{v}_{c,1} = \hat{\mathbf{q}}_0^{-1} . \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{450} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{21} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{60} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11.7 \\ 7.8 \\ 19.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.026 \\ 0.371 \\ 0.325 \end{bmatrix}, \tag{43}$$

$$\mathbf{p}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{C}')^{-1} \mathbf{v}_{c,1} = \begin{bmatrix} 2.16 & 0.0872 & 0.0909 \\ 8.60 & 1.78 & 0.909 \\ 2.02 & 1.77 & 1.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.026 \\ 0.371 \\ 0.325 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.118 \\ 1.182 \\ 0.591 \end{bmatrix}. \tag{44}$$

$$\mathbf{Z}_1 = \hat{\mathbf{p}}_1 . \mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} 0.118 & 0 & 0 \\ 0 & 1.182 & 0 \\ 0 & 0 & 0.591 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 186 & 54 & 30 \\ 12 & 6 & 3 \\ 9 & 6 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.98 & 6.38 & 3.55 \\ 14.18 & 7.09 & 3.55 \\ 5.32 & 3.55 & 8.86 \end{bmatrix} \tag{45}$$

$(k\ CHF)$ Hersteller	Abnehmer S_1	S_2	S_3	Endnachfrage f_{1i}	gesamte Verwendung
S_1	21.98	6.38	3.55	21.27	x_{11}=53.18
S_2	14.8	7.09	3.55	-	x_{12}=24.82
S_3	5.32	3.55	8.86	17.73	x_{13}=35.45
Teilsummen	42.48	17.02	15.95	-	
Lohnkosten W_{1j}	11.7	7.8	19.5	$W_1 = D_1 = 39$	
gesamtes Aufkommen	$x_{11} =$ 53.18	$x_{12} =$ 24.82	$x_{13} =$ 35.45		$X_1 = 152.46$

$$\boxed{\mathbf{S}_1 := \hat{\mathbf{p}}_1^{-1} \mathbf{Z}_1 = \hat{\mathbf{p}}_1^{-1} (\hat{\mathbf{p}}_1 \mathbf{S}_0) = (\hat{\mathbf{p}}_1^{-1} \hat{\mathbf{p}}_1) \mathbf{S}_0 = \mathbf{S}_0 .} \tag{46}$$

Sraffa's Preismodell mit Lohn- und Profitverteilungen (16)

3. Sraffa's Preismodell mit Lohn- und Profitverteilungen

Sraffa Preismodell mit uniformer Profit- und Lohnrate

$$\mathbf{S}'\mathbf{p}(1+r) + w \cdot \mathbf{L} = \hat{\mathbf{q}}\mathbf{p}. \tag{47}$$

Sraffa Preismodell mit Profit- und Lohnverteilungen

$$\hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & r_2 & .. & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & .. & r_n \end{bmatrix} \; ; \; \hat{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & w_2 & .. & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & .. & w_n \end{bmatrix}. \tag{48}$$

$$\boxed{\mathbf{S}'(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{r}})\mathbf{p} + \hat{\mathbf{w}}\mathbf{L} = \hat{\mathbf{q}}\mathbf{p}.} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} P &= (\mathbf{Se})'(\hat{\mathbf{r}}\mathbf{p}), \\ W &= \mathbf{e}'(\hat{\mathbf{w}}\mathbf{p}), \\ Y &= \mathbf{d}'\mathbf{p} = (\mathbf{Se})'(\hat{\mathbf{r}}\mathbf{p}) + \mathbf{e}'(\hat{\mathbf{w}}\mathbf{p}) = W + P, \\ K &= (\mathbf{Se})'\mathbf{p}, \\ X &= \mathbf{q}'\mathbf{p} = Y + K. \end{aligned} \tag{50}$$

Beispiel 3 : Erweitertes Sraffa Preismodell (17)

3. Beispiel :

Ökonomie mit $n = 2$ Sektoren, die vorerst durch die Verflechtungsmatrix $\mathbf{S}$, einen Überschuss $\mathbf{d}$, die Verteilung der Arbeitszeiten $\mathbf{L}$ gegeben ist.

a Lohnverteilung : $\mathbf{w}' = [w_1, w_2] = [0.5, 1.5]$ Profitratenverteilung : $\mathbf{r}' = [r_1, r_2] = [0.15, 0.1]$. Man berechne den Preisvektor $\mathbf{p}$ und P, W, Y, K and X.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 250 & 110 \\ 1'100 & 720 \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1.15 \\ 1.1 \end{bmatrix} ; \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{q} = \mathbf{Se} + \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 250 & 110 \\ 1'100 & 720 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 215 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 575 \\ 1'820 \end{bmatrix} \tag{51}$$

a) Man erhält mit den exogenen Profit- und Lohnverteilungen $\hat{\mathbf{r}}$ and $\hat{\mathbf{w}}$.

$$\boxed{\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 250 & 1'100 \\ 110 & 720 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.15 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 575 & 0 \\ 0 & 1'820 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}} \tag{52}$$

Wir erhalten den Preisvektor $\mathbf{p} = [p_1, p_2]' = [0.5433, 0.0960]'$ (2 Variablen and 2 Gleichungen, $det[\mathbf{G}] \neq 0$).

$$P = (\mathbf{Se})'\hat{\mathbf{r}}\mathbf{p} = 46.8214, \quad ; \quad W = \mathbf{e}'(\hat{\mathbf{w}}\mathbf{L}) = 70 \quad ; \quad Y = \mathbf{d}'\mathbf{p} = P + W = 116.821,$$
$$K = (\mathbf{Se})'\mathbf{p} = 370.41 \quad ; \quad X = \mathbf{q}'\mathbf{p} = K + Y = 487.232. \tag{53}$$

Beispiel 3 : Erweitertes Sraffa Preismodell (18)

b Gegeben : $\mathbf{r}' = [r_1, r_2] = [0.15, 0.1]$, $K_0 = 553.989$, $Y_0 = 141.272$ Man berechne die Lohnverteilung $\mathbf{w}' = [w_1, w_2]$ P, W, X.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 250 & 1'100 \\ 110 & 720 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.15 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 575 & 0 \\ 0 & 1'820 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \\ &X = [575, 1'820] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad , \quad Y = [215, 0] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \\ &Y = Y_0 = 116.821 \quad , \quad X = X_0 = 487.232. \end{aligned} \tag{54}$$

Preisvektor : $\mathbf{p} = [0.5433, 0.0960]'$, *Lohnverteilungen* : $\mathbf{w} = [0.5, 1.5]'$.

$$\begin{aligned} P &= (\mathbf{Se})'\hat{\mathbf{r}}\mathbf{p} = [360, 1'820]' \begin{bmatrix} 1.15 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.543 \\ 0.096 \end{bmatrix} = 46.8214, \\ W &= \mathbf{e}'(\hat{\mathbf{w}}\mathbf{L}) = [1, 1] \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \end{bmatrix} = 70, \\ K &= (\mathbf{Se})'\mathbf{p} = [360, 1'820]' \begin{bmatrix} 0.543 \\ 0.096 \end{bmatrix} = 370.41, \blacktriangle \end{aligned} \tag{55}$$